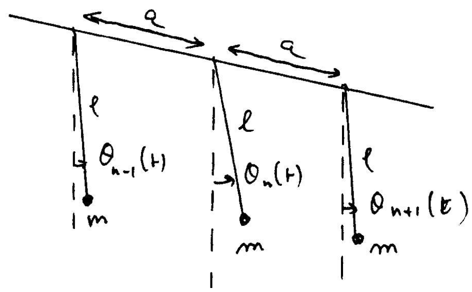
Etude d'un soliton.



Soit une chaîne infinie de pendules simples identiques, coaxiaux et équidistants. Chaque pendule est constitué d'une masse ponctuelle m au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ. Deux pendules successifs sont reliés par un fil de torsion qui exerce sur les deux pendules une interaction de rappel dont le moment projeté sur l'axe commun est proportionnel à la différence de angles que font les pendules concernés avec la verticale ; on note α la constante de proportionnalité. On note $\theta_n(t)$ cet angle pour le pendule de rang n.

Question 1 :
Trouver une équation différentielle liant $\theta_n(t)$ et ses dérivées à $\theta_{n-1}(t)$ et $\theta_{n+1}(t)$.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation Oy du pendule de rang n, la verticale descendante étant Oz et le plan de rotation Ozx. La masse m étant au point M, on note $\overrightarrow{OM} = \ell\,\overrightarrow{e_r}$ dans la base cylindrique locale.

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v} = (\ell\,\overrightarrow{e_r}) \wedge (m\,\ell\,\dot{\theta}_n\,\overrightarrow{e_\theta}) = m\,\ell^2\,\dot{\theta}_n\,\overrightarrow{e_y}$$

Le moment du poids est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{g} = (\ell\,\overrightarrow{e_r}) \wedge (m\,g\,\overrightarrow{e_z}) = m\,g\,\ell\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\cos\theta_n\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta_n\,\overrightarrow{e_\theta}) = -m\,g\,\ell\,\sin\theta_n\,\overrightarrow{e_y}$$

Pour ne pas le laisser inactif, on laisse au lecteur le soin de faire une figure.

L'articulation de l'axe Oy est supposée parfaite et le moment de l'interaction des forces de contact est nulle.

Le fil entre les pendules de rang n et $n+1$ est tordu de l'angle $\theta_{n+1} - \theta_n$ et exerce donc un moment $\alpha\,(\theta_{n+1} - \theta_n)$ sur le pendule de rang n et le moment opposé sur le pendule de rang $n+1$; en se décalant d'un rang, le fil entre les pendules de rang $n-1$ et n est tordu de l'angle $\theta_n - \theta_{n-1}$ et exerce donc un moment $\alpha\,(\theta_n - \theta_{n-1})$ sur le pendule de rang $n-1$ et le moment opposé sur le pendule de rang n.

La dérivée temporelle de $\overrightarrow{\sigma_O}$ est égale à la somme des moments en O ; on projette sur Oy et il vient :

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}_n = -m\,g\,\ell\,\sin\theta_n + \alpha\,(\theta_{n+1} - \theta_n) - \alpha\,(\theta_n - \theta_{n-1})$$

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}_n = -m\,g\,\ell\,\sin\theta_n + \alpha\,(\theta_{n-1} + \theta_{n+1} - 2\,\theta_n)$$

Question 2 :
Dans l'hypothèse d'un phénomène variant significativement sur des distances grandes devant la distance a entre deux pendules successifs, un passage au continu s'impose ; montrer que l'on arrive à une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\,t^2} = -\omega_0^2\,\sin(\theta) + c^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\,y^2}$$

où ω_0 et c sont des constantes dont on donnera l'expression.

Avec un choix convenable de l'origine, le pendule se trouve à une ordonnée $y_n = n\,a$; on cherche donc une fonction $\tilde{\theta}(y,t)$ telle que, pour n entier on ait $\tilde{\theta}(n\,a,t) = \theta_n(t)$ et qu'entre les points d'ordonnées $n\,a$, la fonction se comporte de façon raisonnable (continuité, dérivabilité, variations lentes) de façon qu'un développement limité à l'ordre deux soit une bonne approximation. Alors

$$\theta_{n+1}(t) = \tilde{\theta}[(n+1)\,a,t] = \tilde{\theta}(n\,a+a,t) = \tilde{\theta}(n\,a,t) + a\,\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}\tilde{\theta}(n\,a,t) + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial y^2}(n\,a,t) + \cdots$$

de même

$$\theta_{n-1}(t) = \tilde{\theta}[(n-1)\,a,t] = \tilde{\theta}(n\,a-a,t) = \tilde{\theta}(n\,a,t) - a\,\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}(n\,a,t) + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial y^2}(n\,a,t) + \cdots$$

On en déduit aisément que

$$\theta_{n-1} + \theta_{n+1} - 2\,\theta_n = a^2\,\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial y^2}(n\,a,t)$$

On reporte dans l'équation du mouvement du pendule de rang n et l'on confond dans l'écriture $\tilde{\theta}$ et θ

$$m\,\ell^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -m\,g\,\ell\,\sin\theta + \alpha\,a^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

Reste à diviser par $m\,\ell^2$ et à renommer les constantes pour arriver à la forme proposée.

Question 3 :

Pour des phénomènes de petite amplitude, on recherche des solutions de la forme, en notation complexe, $\theta = \theta_m\,\exp(i\,(\omega\,t - k\,y))$. Mettre en évidence une pulsation de coupure. Montrer que le milieu est dispersif et calculer les vitesses de phase et de groupe . Rappeler en quoi la dispersion interdit la propagation sans déformation d'un signal de durée limitée.

Pour de faibles amplitudes, on peut confondre le sinus et l'angle et l'équation se linéarise en

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\,t^2} = -\omega_0^2\,\theta + c^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\,y^2}$$

$$\text{si} \qquad \theta(y,t) = \theta_m\,\exp(i\,(\omega\,t - k\,y))$$

$$\text{alors} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\omega^2\,\theta_m\,\exp(i\,(\omega\,t - k\,y)) = -\omega^2\,\theta(y,t)$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -k^2\,\theta_m\,\exp(i\,(\omega\,t - k\,y)) = -k^2\,\theta(y,t)$$

l'équation linéarisée devient

$$-\omega^2\,\theta(y,t) = -\omega_0^2\,\theta(y,t) - k^2\,c^2\,\theta(y,t)$$

$$\text{d'où} \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + k^2\,c^2$$

$$\text{ou encore} \qquad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

qui est l'équation de dispersion liant ω à k.

Si $\omega < \omega_0$, alors k est imaginaire pur, d'où en notant $k = -i\,\kappa$

$$\theta(y,t) = \theta_m\ \exp(i\,(\omega\,t - k\,y)) = \theta_m\ \exp(-\kappa\,y)\ \exp(i\,\omega\,t)$$

qui correspond à un phénomène non progressif amorti selon Oy

Si $\omega > \omega_0$, alors la propagation est possible mais le milieu est dispersif car k n'est pas proportionnel à ω ; en effet

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}$$

Les formules du cours donnent

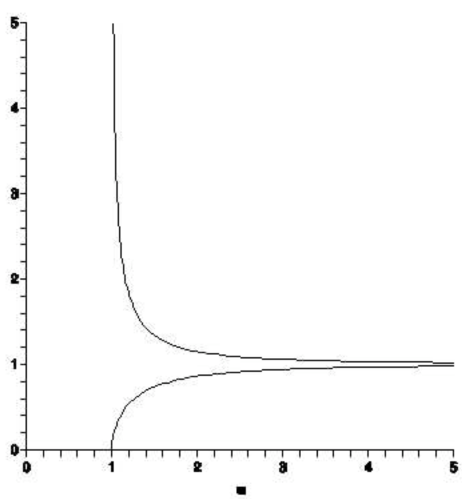
$$V_\phi^{-1} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}\,\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega}$$

$$V_g^{-1} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{2\,\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}\,2\,\omega = \frac{1}{c}\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

et enfin

$$V_\phi = c\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

$$V_g = c\,\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega}$$



On a tracé ci-dessus les graphes de V_ϕ/c (en haut) et V_g/c (en bas) en fonction de ω/ω_0

Il est inutile *donc dangereux*[1] de remarquer comme on le voit souvent écrit que $V_\phi\,V_g = c^2$; c'est dangereux car on a volontiers l'impression qu'une formule si belle et si simple ne peut être qu'universelle, ce qui n'est bien sûr pas le cas. Circulons donc, il n'y a rien à voir.

Rappelons que dans un milieu dispersif, un signal bref, c'est-à-dire nul en dehors d'un court intervalle de temps se propage en s'étalant dans le temps et en diminuant d'amplitude.

[1] un aphorisme récurrent de votre serviteur

Question 4 :

Vérifions ce dernier point en cherchant à l'équation linéarisée une solution correspondant à la propagation sans déformation d'un signal limité dans le temps ; c'est à dire qu'on cherche une fonction f ***de*** $\mathbb{R}$ ***dans*** $\mathbb{R}$ ***et une constante*** v ***telles que*** $\theta(y,t) = f(t-y/v)$ ***avec*** $f(\tau) \to 0$ (modulo $2\,\pi$) et $\mathrm{f}'(\tau) \to 0$ quand $|\tau| \to \infty$***. Montrer que cette recherche conduit à un échec.***

Si $\theta(y,t) = f(t-y/v)$, alors en dérivant comme une fonction composée

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = f'(t-y/v)\,\frac{\partial}{\partial y}(t-y/v) = \left(-\frac{1}{v}\right)\,f'(t-y/v)$$

et en dérivant une seconde fois

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{v}\right)^2\,f''(t-y/v)$$

de même

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = (1)^2\,f''(t-y/v)$$

En reportant dans l'équation linéarisée

$$f'' = -\omega_0^2\,f + \frac{c^2}{v^2}\,f''$$

$$\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\,f'' = -\omega_0^2\,f$$

Si $1 - c^2/v^2$ est positif, f est sinusoïdal et ne tend pas vers 0 à l'infini ; si cette quantité est négative, f est une combinaison d'exponentielles et diverge soit vers ∞ soit vers $-\infty$; soit enfin elle est nulle et f est nulle. Dans aucun cas, il ne s'agit d'un signal limité.

Question 5 :

Reprendre cette étude avec l'équation non linéaire. Montrer, en se fondant sur des idées de physicien, que $\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)(f')^2 + \omega_0^2(1-\cos(f)) = 0$ ***; pour la suite de la résolution, on a le droit de s'aider d'un logiciel de calcul formel et même d'utiliser le joker «coup de fil à un ami» (mathématicien, bien sûr).***

Les mêmes calculs conduisent ici à

$$\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\,f'' = -\omega_0^2\,\sin f$$

En pensant à la démonstration du théorème de l'énergie mécanique à partir de $m\,\ddot{x} = F(x)$, multiplions par f' puis intégrons :

$$\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\,f''\,f' = -\omega_0^2\,\sin f\,f'$$

$$\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\,\frac{f'^2}{2} = \omega_0^2\,\cos f + Cte$$

A l'infini f et f' tendent vers 0 et $\cos f$ vers 1, ce qui permet de trouver la constante et finalement

$$\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\,\frac{f'^2}{2} + \omega_0^2\,(1-\cos f) = 0$$

Notons $\tau = t - y/v$ l'argument de f : l'idée est d'isoler f'^2, d'en prendre la racine et de séparer les variables

$$f'^2 = \frac{2\,\omega_0^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1}\,(1 - \cos f) = \frac{4\,\omega_0^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1}\,\sin^2(\frac{f}{2})$$

Au signe près qui correspond au sens de rotation. Remarquons au passage qu'un tel soliton n'est possible que pour $v < c$

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2\,\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,\sin(\frac{f}{2})$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\sin(\frac{f}{2})} = \frac{2\,\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,\mathrm{d}\tau$$

La suite relève de la routine mathématique ; bien que seule l'interprétation du résultat soit pertinente, il n'est pas totalement inutile qu'un physicien ait une aisance minimale dans les calculs[2]

On passe classiquement par la tangente de l'angle moitié, c'est-à-dire qu'on pose

$$u = \tan\left(\frac{f}{4}\right)$$

$$\text{d'où} \qquad \sin\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{2\,u}{1 + u^2}$$

$$\text{et} \qquad f = 4\,\arctan(u)$$

$$\text{d'où} \qquad \mathrm{d}f = \frac{4\,\mathrm{d}u}{1 + u^2}$$

Ce changement de variable conduit donc à

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,\mathrm{d}\tau$$

qui s'intègre aisément en

$$\ln u = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,\tau + Cte$$

La valeur de la constante est liée au choix des origines du temps et de l'espace ; on peut toujours les choisir de sorte que la constante soit nulle. Alors

$$f(\tau) = f(t - y/v) = 4\,\arctan(u) = 4\,\arctan\left[\exp\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,(t - y/v)\right)\right]$$

Question 6 :
Tracer le graphe de cette fonction, par exemple en $y = 0$ et commenter

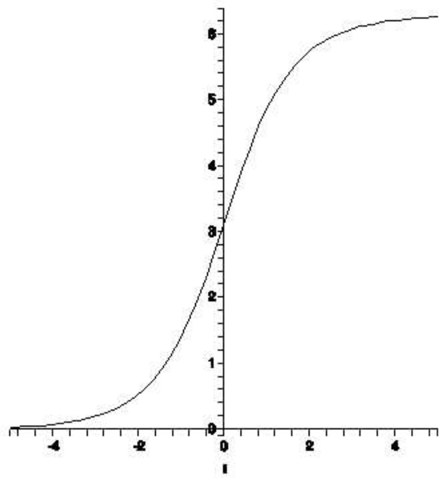
On a donc

$$\theta(0, t) = 4\,\arctan\left[\exp\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}\,t)\right)\right]$$

[2]En affirmant ceci, je me classe irrémédiablement dans la catégorie des espèces menacées d'extinction et vous implore de signer la pétition réclamant mon classement parmi les espèces protégées.

Pour $t \to -\infty$, l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$, l'exponentielle vers 0 et l'arc-tangente vers 0 ainsi que θ ; Pour $t \to +\infty$, l'argument de l'exponentielle tend vers $+\infty$, l'exponentielle vers $+\infty$ et l'arc-tangente vers $\pi/2$ et θ vers $2\,\pi$, c'est à dire revient à l'équilibre mais après un tour complet (notons que c'est ici parce que 0 et $2\,\pi$ correspondent à la même position que cette solution est conforme à la définition d'un signal bref). Par ailleurs pour $t = 0$, l'argument de l'exponentielle tend vers 0, l'exponentielle vers 1 et l'arc-tangente vers $\pi/4$ et θ vers 2π, c'est à dire le point le plus haut.

Le passage du soliton se traduit par la rotation d'un tour complet du pendule selon la loi particulière décrite par la fonction ci-dessus dont voici le graphe.



On peut donner un indicateur de la durée pratique de ce signal, au moins en ordre de grandeur par l'intervalle entre les instants (opposés par symétrie) où $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ correspondant à

$$t\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}}{\omega_0}\,\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

qui montre que la largeur du soliton est liée à sa vitesse de propagation, les plus lents étant les plus étalés.

Question 7 :
Pourquoi s'intéresse-t-on à la propagation par solitons dans les communications numériques à très haut débit ?

Tout simplement parce qu'il s'agit de l'émission de signaux brefs régulièrement espacés. S'ils s'élargissent dans un milieu dispersif, ils finissent par «baver» les uns sur les autres et ôtent ainsi toute lisibilité au message.